PART3　ピタゴラス数

3　a，b，c を整数とし，$a^2+b^2=c^2$ とする。次のことを証明せよ。

(1)　a^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

(2)　a，b のうち，少なくとも 1 つは 3 の倍数である。

(3)　a^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(4)　a，b，c が互いに素であるとき，c は奇数である。

Point Pickup

倍数の性質に関する証明問題は，余りによる分類(剰余類)が効果的である。

$a^2+b^2=c^2$ を満たす 3 つの自然数の組 (a, b, c) を，ピタゴラス数という。

第8講　PART3　確認問題

1 n を整数とする。また，整数 a，b，c は $a^2+b^2=c^2$ を満たすとする。このとき，次のことを証明せよ。空欄には最も適切な値を答え，選択肢は最も適切なものを選べ。

(1) n^2 を4で割った余りは0または1である。

(2) a と b のうち少なくとも1つは偶数である。

(3) a が偶数，b が奇数のとき，a は4の倍数である。

(証明)

(1) すべての整数 n は，[ア]k，[ア]$k+$[イ](k は整数)のいずれかで表される。

$n=$[ア]k のとき

$n^2=$[ウ]k^2

$n=$[ア]$k+$[イ]のとき

$n^2=$[ウ]$(k^2+k)+$[エ]

よって，n^2 を4で割った余りは0または1である。

(2) [オ]と仮定する。

このとき，(1)より a^2，b^2 はともに4で割った余りが[カ]であるから，a^2+b^2 を4で割った余りは[キ]である。また(1)より，c^2 を4で割った余りは0または1である。

よって，[ク]ことに矛盾するから，[オ]ことはない。

したがって，a，b のうち少なくとも1つは偶数である。

(3)　$a=2l$, $b=2m+1$ (l, m は整数) とおくと

$$c^2=(2l)^2+(2m+1)^2$$
$$=4\left(l^2+m^2+m\right)+1 \quad \cdots\cdots(*)$$

であるから，(1)より c は [ケ] である。

$c=2j+1$ (j は整数) とおくと，($*$)より

$$(2j+1)^2=4\left(l^2+m^2+m\right)+1$$

よって　$l^2=j(j+1)-m(m+1)$

$j(j+1)$ と $m(m+1)$ は，ともに連続する 2 整数の積

であるから [コ] である。ゆえに，l^2 は [コ] である。

(偶数)^2＝偶数，(奇数)^2＝奇数 であるから，l も [コ]

である。

ゆえに，$2l$ は 4 の倍数である。

したがって，$a=2l$ より，a は 4 の倍数である。

[[オ] の選択肢]

① a は奇数，b は偶数である

② a, b がともに奇数である

③ a, b のうち，少なくとも 1 つは奇数である

[[ク] の選択肢]

① a, b, c が整数である

② $a^2+b^2=c^2$ である

③ c が奇数である

④ c が偶数である

[[ケ], [コ] の選択肢]

①　奇数　　　　②　偶数

[MEMO]

PART3　ピタゴラス数

3　a，b，c を整数とし，$a^2+b^2=c^2$ とする。次のことを証明せよ。

(1)　a^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

(2)　a，b のうち，少なくとも 1 つは 3 の倍数である。

(3)　a^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(4)　a，b，c が互いに素であるとき，c は奇数である。

(1)　すべての整数 a は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$ (k は整数)のいずれかで表される。

$a=3k$ のとき　$a^2=(3k)^2=3\cdot 3k^2$

$a=3k+1$ のとき　$a^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$a=3k+2$ のとき　$a^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

よって，a^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

(2)　a，b がともに 3 の倍数でないと仮定する。

このとき，(1)より a^2，b^2 はともに 3 で割った余りが 1 であるから，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 2 である。また(1)より，c^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

よって，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾する。

したがって，a，b のうち，少なくとも 1 つは 3 の倍数である。

(3)　すべての整数 a は，$2k$，$2k+1$ (k は整数)のいずれかで表される。

$a=2k$ のとき　$a^2=(2k)^2=4k^2$

$a=2k+1$ のとき　$a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$

よって，a^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(4)　a，b は互いに素であるから，a，b がともに偶数であることはない。

a，b がともに奇数のとき，(3)より a^2，b^2 はともに 4 で割った余りが 1 であるから，a^2+b^2 を 4 で割った余りは 2 である。また(3)より，c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

よって，$a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾するから，a，b がともに奇数であることはない。

したがって，a，b は偶奇を異にする。

対称性より，a を偶数，b を奇数としても一般性を失わない。このとき，a^2+b^2 は奇数であるから c^2 も奇数である。したがって，a，b，c が互いに素であるとき，c は奇数である。

第 8 講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イ：1，ウ：4，エ：1，オ：②，
カ：1，キ：2，ク：②，ケ：①，コ：②

[解説]

(1)　すべての整数 n は，$2k$，$2k+1$（k は整数）のいずれかで表される。［A］

$n=2k$ のとき

$$n^2=(2k)^2=4k^2$$

$n=2k+1$ のとき

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$$

よって，n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

[A]　k を整数とするとき，すべての整数は，正の整数 m で割ったときの余りで
mk，$mk+1$，$mk+2$，……，$mk+(m-1)$
の m 通りに分類できる。

(2)　**a，b がともに奇数である**と仮定する。［B］

このとき，(1)より a^2，b^2 はともに 4 で割った余りが **1** であるから，a^2+b^2 を 4 で割った余りは **2** である。また(1)より，c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

よって，$\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$ **である**ことに矛盾するから，a，b がともに奇数であることはない。

したがって，a，b のうち少なくとも 1 つは偶数である。［C］

[B]　背理法を利用して証明する。命題の証明において，その命題が成り立たないと仮定し，矛盾を導くことによって，もとの命題が正しいことを証明する方法を背理法という。

[C]　$a^2+b^2=c^2$ を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をピタゴラス数という。

(3)　$a=2l$，$b=2m+1$（l，m は整数）とおくと

$$c^2=(2l)^2+(2m+1)^2=4(l^2+m^2+m)+1 \quad \cdots\cdots(*)$$

であるから，(1)より c は**奇数**である。

$c=2j+1$ (j は整数)とおくと，(＊)より

$$(2j+1)^2=4\left(l^2+m^2+m\right)+1$$

よって　$l^2=j(j+1)-m(m+1)$

$j(j+1)$ と $m(m+1)$ は，ともに連続する 2 整数の積であるから**偶数**である。

ゆえに，l^2 は偶数である。

(偶数)^2＝偶数，(奇数)^2＝奇数であるから，l も偶数である。

ゆえに，$2l$ は 4 の倍数である。

したがって，$a=2l$ より，a は 4 の倍数である。